

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXI. esztendő

2024-2025. tanév

9. évfolyam

I. forduló

Megoldások

1. Van-e a 2-nek vagy a 3-nak olyan pozitív egész kitevőjű hatványa, aminek tízes számrendszerbeli alakja 1 db 1-es, 2 db 2-es, 3 db 3-as ... 9 db 9-es számjegyet tartalmaz?

Megoldás

A képzett számban a számjegyek összege

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + 9 \cdot 9 = 285$$

Mivel 285 osztható 3-mal, de 9-cel nem, így minden, ezekből a számjegyekből alkotott szám osztható lesz 3-mal, de 9-cel nem, vagyis nem lehet sem 2 sem 3 pozitív egész kitevőjű hatványa. (Természetesen 3^1 nem megoldás.).

2. Egy $n \times n \times n$ -es (ahol n egynél nagyobb páratlan egész szám) kockát középen (tehát az oldallapokon az $n \times n$ -es felosztás szerint vízszintesen és függőlegesen is pontosan középen lévő egységnégyzetek mentén) mindhárom irányból egy-egy n magasságú, egységnégyzet alapú négyzetes oszlop mentén teljesen kifúrtuk. A kocka lyukas lapjai területének összege hatszorosa a kocka belsejében keletkezett három „alagút” teljes felszínének. Mekkora az eredeti kocka éle?

Megoldás

A kilyukasztott kocka lyukas oldallapjai területének összege $6n^2 - 6$, a három „alagút” felszíne: $3 \cdot 4 \cdot (n - 1) = 12(n - 1)$, így

$$\begin{aligned} 6n^2 - 6 &= 12(n - 1) \\ 6(n - 1)(n + 1) &= 12(n - 1) \\ n + 1 &= 12 \end{aligned}$$

ahonnan $n = 11$.

3. Felbontható-e az $\{1; 2; 3; \dots; 20\}$ halmaz egy kételemű A és egy 18 elemű B halmazra úgy, hogy A elemeinek szorzata egyenlő legyen B elemeinek összegével?

Megoldás

Tételezzük föl, hogy létezik ilyen fölbonthatás. Legyen $A = \{x; y\}$. Ekkor B elemeinek összege

$$1 + 2 + \dots + 20 - x - y = \frac{1+20}{2} \cdot 20 - x - y = 210 - x - y, \text{ így}$$

$$\begin{aligned} xy &= 210 - x - y \\ xy + x + y &= 210 \\ x(y + 1) + y + 1 &= 211 \\ (x + 1)(y + 1) &= 211 \end{aligned}$$

azaz 211 fölbontható két pozitív, egynél nagyobb egész szám szorzatára, ami nem lehetséges, mivel 211 prímszám.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ nem 2 pozitív egész kitevőjű hatványa, akkor $2^\alpha + 1$ nem lehet prímszám!

Megoldás

Ha α nem 2 pozitív egész kitevőjű hatványa, akkor prímtényezős felbontása páratlan számot (vagy számokat) is tartalmaz, amelyet (vagy amelyek szorzatát) jelölje l , így $\alpha = 2^k \cdot l$ alakú, ahol $k \in \mathbb{N}$ és l 1-nél nagyobb páratlan szám.

$2^\alpha + 1 = 2^{2^k \cdot l} + 1 = (2^{2^k})^l + 1$, ami két páratlan kitevőjű hatvány összege, vagyis szorzattá alakítható, hiszen osztható $(2^{2^k} + 1)$ -gyel, ami 1-től és $2^{2^k \cdot l} + 1$ -től különböző szám.

5. Az $x^4 + 4$ kifejezést szorzattá alakíthatjuk az alábbi módon:

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$$

Adjon meg legalább három különböző a és b pozitív egész számokból álló $(a; b)$ számpárt úgy, hogy az $x^a + b$ kifejezés hasonló módon legyen szorzattá alakítható!

Megoldás

a lehet 4 valamely pozitív egész számú többszöröse, azaz $4k$ alakú ($k \in \mathbb{Z}^+$), mivel

$$\begin{aligned} x^{4k} + 4 &= x^{4k} + 4x^{2k} + 4 - 4x^{2k} = (x^{2k} + 2)^2 - (2x^k)^2 \\ &= (x^{2k} + 2 + 2x^k)(x^{2k} + 2 - 2x^k) \end{aligned}$$

b pedig 2 páratlan pozitív egész kitevőjű hatványának és egy négyzetszám szorzatának a négyzete, azaz $(2^{2l+1} \cdot m^2)^2$ alakú ($l \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}^+$), így

$$\begin{aligned} x^{4k} + (2^{2l+1} \cdot m^2)^2 &= x^{4k} + 2 \cdot x^{2k} \cdot 2^{2l+1} \cdot m^2 + (2^{2l+1} \cdot m^2)^2 - 2 \cdot x^{2k} \cdot 2^{2l+1} \cdot m^2 \\ &= (x^{2k} + 2^{2l+1} \cdot m^2)^2 - x^{2k} \cdot 2^{2l+2} \cdot m^2 \\ &= (x^{2k} + 2^{2l+1} \cdot m^2)^2 - (x^k \cdot 2^{l+1} \cdot m)^2 \\ &= (x^{2k} + 2^{2l+1} \cdot m^2 + x^k \cdot 2^{l+1} \cdot m)(x^{2k} + 2^{2l+1} \cdot m^2 - x^k \cdot 2^{l+1} \cdot m) \end{aligned}$$

Ha például $k = 1, l = 0, m = 1$, akkor $a = 4k = 4, b = (2^{2 \cdot 0 + 1} \cdot 1^2)^2 = 4$, azaz a példában szereplő $x^4 + 4$ -et kapjuk.

Ha $k = 1, l = 1, m = 1$, akkor $a = 4k = 4, b = (2^{2 \cdot 1 + 1} \cdot 1^2)^2 = 64$, ekkor $x^4 + 64$ -et kapunk.

Ha $k = 2, l = 0, m = 3$, akkor $a = 4k = 8, b = (2^{2 \cdot 0 + 1} \cdot 3^2)^2 = 324$, ekkor $x^8 + 324$ -et kapunk.

Ha $k = 3, l = 1, m = 2$, akkor $a = 4k = 12, b = (2^{2 \cdot 1 + 1} \cdot 2^2)^2 = 1024$, ekkor $x^{12} + 1024$ -et kapunk.

6. A tízes számrendszerben fölírt 740-et a t alapú számrendszerbe átírva olyan négyjegyű számot kapunk, melynek utolsó jegye 5. Határozzuk meg t értékét és 740 t alapú számrendszerbeli alakját!

Megoldás

A feladat feltételeiből az alábbiakat állíthatjuk t -ről.

- $t > 5$, mivel az 5-ös számjegy szerepel a t alapú számrendszerben fölírt számban.
- $t < 10$, mivel a tízes alapú számrendszerben háromjeggyel leírt szám t alapú számrendszerbeli alakja négyjegyű.
- Mivel $740 = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + 5$, ahonnan $735 = t(at^2 + bt + c)$, ezért t osztója a 735-nek, vagyis t páratlan.

E három feltételből t értéke csak 7 lehet. S valóban $740 = 2105_7$.

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXI. esztendő

2024-2025. tanév

10. évfolyam

I. forduló

Megoldások

1. Hány négyzetszám található az alábbi összegek között?

$$2; 2 + 4; 2 + 4 + 6; 2 + 4 + 6 + 8; \dots; 2 + 4 + 6 + \dots + 2024$$

Megoldás

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k = \frac{(2 + 2k) \cdot k}{2} = k(1 + k) = k^2 + k \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

Mivel $k^2 < k^2 + k < k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$

Ezért a feladatban szereplő összegek két szomszédos négyzetszám közé esnek, vagyis egyetlen négyzetszám sincs közöttük.

2. Egy kör mentén felírunk 5 különböző számot. Utána mindegyik számot letöröltük, és helyére a kétszeresének és az eredeti, óramutató járása szerint jobb oldali szomszédjának az összegét írtuk. Így óramutató járása szerint az öt szám: 13; 2; -1; 17; 11. Melyik volt az eredeti 5 szám?

Megoldás

Eredeti számok: $a; b; c; d; e$.

Eredmények: $2a + b = 13; 2b + c = 2; 2c + d = -1; 2d + e = 17; 2e + a = 11$

Ebből:

$$\begin{aligned} b = 13 - 2a &\rightarrow c = 2 - 2(13 - 2a) = -24 + 4a \rightarrow d = -1 - 2(-24 + 4a) = 47 - 8a \\ &\rightarrow e = 17 - 2(47 - 8a) = -77 + 16a \rightarrow 2(-77 + 16a) + a = 11 \end{aligned}$$

Amiből $a = 5; b = 3; c = -4; d = 7; e = 3$.

3. Egy hegyesszögű háromszög két oldala fölé (kifelé) négyzeteket rajzolunk. Bizonyítsuk be, hogy ezeknek a négyzeteknek azon közös csúccsal rendelkező darabjai, amelyeket az oldalakkal szemközti csúcson átmenő magasságvonalak vágnak ki belőlük, egyenlő területűek!

Megoldás

Jelölje a C -n átmenő magasságvonal és az AB oldal metszéspontját D , E pedig a BC oldal és az A -n átmenő magasságvonal metszéspontját, m_a, m_c pedig az a és c oldalhoz tartozó magasságot! Legyen $u = BE, v = BD$.

$AEB_\Delta \sim CDB_\Delta$, mivel derékszögűek és a B csúcsánál fekvő szögük közös, tehát

$$\frac{u}{v} = \frac{m_a}{m_c}$$

Másrészt az ABC háromszög területe $\frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$ ahonnan $a \cdot m_a = c \cdot m_c$ vagyis $\frac{m_a}{m_c} = \frac{c}{a}$.

Így $\frac{u}{v} = \frac{c}{a}$, ahonnan $u \cdot a = c \cdot v$ ami a bizonyítandó állítás volt.



Ha p és q megoldásai az egyenletnek, akkor kielégítik azt, azaz

$$q^2 + pq + q = 0$$

Ha $q \neq 0$, akkor a második egyenletet q -val osztva kapjuk, hogy $q + p + 1 = 0$, ahonnan $q = -p - 1$, amit az első egyenletbe helyettesítünk. Ekkor azt kapjuk, hogy $2p^2 - p - 1 = 0$, ahonnan $p_1 = 1$; $p_2 = -\frac{1}{2}$. Ekkor $q_1 = -2$, $q_2 = -\frac{1}{2}$.

$p = -\frac{1}{2}, q = -\frac{1}{2}$ esetén az $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ egyenlet két valós megoldása viszont 1 és $-\frac{1}{2}$, így a $p = -\frac{1}{2}, q = -\frac{1}{2}$ nem elégíti ki az eredeti feladat feltételeit.

Ha $x^2 + px + q = 0$ egyenlet két valós megoldása $x_1 = p$ és $x_2 = q$, akkor a gyökök és együtthatók közti összefüggések alapján:

$$pq = q$$

A $p = q = 0$ és a $p = 1, q = -2$ megoldások pedig eleget tesztnek az eredeti feladat feltételeinek.

5. Egy táblára fölírtuk az $x^2 + 20x + 24 = 0$ egyenletet. Ezután új egyenletet írtunk a táblára úgy, hogy az első egyenletben vagy az elsőfokú tag együtthatóját vagy a konstans tagot növeltük vagy csökkentettük eggyel (de egy lépésben csak az egyiket). Ilyen lépésekkel eljutottunk az $x^2 + 24x + 20 = 0$ egyenlethez. Bizonyítsuk be, hogy volt közben olyan egyenlet a táblán, amelynek gyökei egész számok voltak.

Megoldás

Az első egyenletben a konstans tag nagyobb az elsőfokú tag együtthatójánál, míg a végső egyenletben ez fordítva van. Mivel az együtthatókat egyesével változtattuk, ezért volt közte olyan lépés, ahol az elsőfokú tag együtthatója eggyel volt nagyobb a konstans tagnál, vagyis az egyenlet $x^2 + (c + 1)x + c = 0$ ($c \in \mathbb{Z}$) vagyis $(x + c)(x + 1) = 0$ alakú volt. Ennek az egyenletnek a gyökei, $-c$ és -1 , valóban egész számok.

6. Hány rácspont illeszkedik az $f(x) = \frac{3x^2 + 15x + 12}{x^2 + 4x + 3}$ függvény grafikonjára?

Megoldás

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x^2 + 15x + 12}{x^2 + 4x + 3} = \frac{3(x^2 + 4x + 3) + 3x + 3}{x^2 + 4x + 3} = 3 + \frac{3x + 3}{x^2 + 4x + 3} = \\ &= 3 + \frac{3(x + 1)}{(x + 1)(x + 3)} = 3 + \frac{3}{x + 3} \end{aligned}$$

Az f függvény akkor vesz föl egész helyen egész értéket, ha $(x + 3)$ osztója 3-nak, vagyis

$$x + 3 = 3, \text{ ahonnan } x = 0$$

$$x + 3 = -3, \text{ ahonnan } x = -6$$

$$x + 3 = 1, \text{ ahonnan } x = -2$$

$$x + 3 = -1, \text{ ahonnan } x = -4$$

így a függvény grafikonja négy rácsponton $((0; 3), (-6; -3), (-2; 1), (-4; -1))$ megy át.

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXI. esztendő

2024-2025. tanév

11. évfolyam

I. forduló

Megoldások

1. Hányval több számjegyet tartalmaz 2^{2024} értékének ötös számrendszerbeli alakja, mint a tízes számrendszerbeli alakja?

Megoldás

Egy pozitív n egész szám a alapú számrendszerbeli alakjában lévő számjegyek száma: $\lfloor \log_a n \rfloor + 1$, ahol $\lfloor x \rfloor$ az x egész részét jelenti, vagyis az x -nél nem nagyobb egész számok közül a legnagyobbat.

2^{2024} ötös számrendszerbeli alakja: $\lfloor \log_5 2^{2024} \rfloor + 1 = \lfloor 2024 \cdot \log_5 2 \rfloor + 1 = \lfloor 872,69 \rfloor + 1 = 873$

2^{2024} tízes számrendszerbeli alakja: $\lfloor \lg 2^{2024} \rfloor + 1 = \lfloor 2024 \cdot \lg 2 \rfloor + 1 = \lfloor 610,28 \rfloor + 1 = 611$

2^{2024} ötös számrendszerbeli alakja 262-vel több számjegyet tartalmaz, mint tízes számrendszerbeli alakja.

2. Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza egész szám. Igazoljuk, hogy a háromszög három egyenlő területű részre vágható úgy, hogy a részek területe is egész szám!

Megoldás

Ha a befogók a és b , az átfogó c , akkor a háromszög területe $T = \frac{ab}{2}$, aminek harmadrésze $\frac{ab}{6}$.

Így azt kell igazolni, hogy $\frac{ab}{6}$ egész szám, vagyis ab osztható 3-mal és 2-vel.

Az a , b , c olyan egész számok, amelyekre teljesül, hogy $a^2 + b^2 = c^2$.

Egy négyzetszám 3-mal osztva 0 vagy 1 maradékot ad aszerint, hogy az alap osztható 3-mal vagy sem, így, ha a és b egyike sem lenne 3-mal osztható, akkor (mivel $a^2 + b^2 = c^2$) c^2 -nek 3-mal osztva 2-t kellene adni maradékként, ami nem lehet, tehát a vagy b osztható 3-mal, vagyis ab is osztható 3-mal.

Mivel egy négyzetszám 4-gyel osztva 0 vagy 1 maradékot ad aszerint, hogy az alap páros vagy páratlan, így, ha a és b egyike sem lenne 2-vel osztható, akkor (mivel $a^2 + b^2 = c^2$) c^2 -nek 4-gyel osztva 2-t kellene adni maradékként, ami nem lehet, tehát a vagy b osztható 2-vel, vagyis ab is osztható 2-vel.

Mivel ab osztható 2-vel és 3-mal, ezért osztható 6-tal is, így $\frac{ab}{6}$ egész szám.

Ez az osztás meg is valósítható úgy, hogy pl. a hárommal osztható hosszúságú oldallal szemközti csúcsot összekötjük az oldal harmadoló pontjaival, amivel az eredeti háromszöget három egyenlő területű háromszögre osztjuk.

3. Melyik az a legnagyobb palindrom szám, azaz balról jobbra és jobbról balra olvasva megegyező (pl. 12321) szám, amelyben a számjegyek összege 40 és semelyik számjegy sem fordul elő benne kettőnél többször?

Megoldás

Egy szám annál nagyobb, minél több számjegyet tartalmaz.

Ez a szám nem lehet 14 számjegyű, mert még a legkisebb számjegyekből alkotott összeg esetén is $2 \cdot (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 42 > 40$ lesz a számjegyek összege, így a keresett szám 13 jegyű, ami azt jelenti, hogy pontosan egy olyan számjegy van (a középső), amelyik pontosan egyszer fordul elő benne. Ez a középső számjegy biztosan páros, hiszen a többi számjegy kettesével fordul elő, tehát összegük páros, így a középső jegynek is párosnak kell lennie, hogy az összegük 40, azaz páros szám legyen.

Középen nem állhat 0, mert akkor a két oldalon lévő 6-6 számjegy összege 20-20 márpedig a hat legkisebb pozitív egész szám összege $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.

Ha a középső számjegy a 2, akkor az első hat számjegy összege 19 kell, hogy legyen. Az így kapható legnagyobb szám: 6543102013456.

Ha a középső számjegy 4, akkor az első hat számjegy összege 18 kell, hogy legyen. Az így kapható legnagyobb szám: 7532104012357.

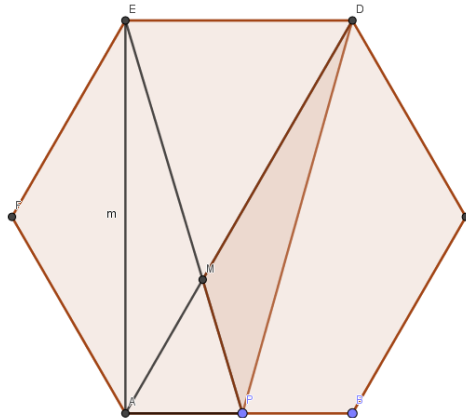
Ha a középső számjegy 6, akkor az első hat számjegy összege 17 kell, hogy legyen. Az így kapható legnagyobb szám: 7432106012347.

Ha a középső számjegy 8, akkor az első hat számjegy összege 16 kell, hogy legyen. Az így kapható legnagyobb szám: 6432108012346.

A legnagyobb, a feladat feltételeinek megfelelő szám tehát a 7532104012357.

4. Az $ABCDEF$ egységnyi oldalú, szabályos hatszög AB oldalának egy tetszőleges belső pontját jelölje P , az AP szakasz hossza legyen x . A PE és AD szakaszok metszéspontját jelölje M . Adjuk meg az MPD háromszög területét x függvényében!

Megoldás



$EDPA$ trapéz, így $T_{MPD} = T_{MAE} = T$, így elég az MAE háromszög területét meghatározni.

Az AED háromszög derékszögű, területe:

$$T_{AED} = \frac{1 \cdot m}{2} = T_{MAE} + T_{EDM}$$

Ahol $m = 2 \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. És PAM és EDM háromszögek hasonlósága miatt az EDM háromszög magassága $m \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{\sqrt{3}}{x+1}$, így

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = T + \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{x+1}}{2} = T + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$$

Tehát

$$T = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{x}{x+1}$$

5. Egy másodfokú p polinom együtthatói egész számok. Mennyi a gyökök szorzatának maximális értéke, ha $p(\sqrt{7}) = 2031 + 2024\sqrt{7}$?

Megoldás

Legyen $p(x) = ax^2 + bx + c$. Ekkor $p(\sqrt{7}) = 7a + b\sqrt{7} + c$. Ez csak akkor lehet egyenlő a feltételben foglalt számmal, ha mindkét kifejezésben a racionális és irracionális tagok egyenlők:

$$2031 = 7a + c \text{ és } 2024\sqrt{7} = b\sqrt{7}$$

Ebből $c = 2031 - 7a$ és $b = 2024$.

Ekkor a diszkrimináns:

$$D = 2024^2 - 4a(2031 - 7a) = 28a^2 - 8124a + 2024^2$$

Ami mindig pozitív, hiszen

$$28a^2 - 8124a + 2024^2 = 28\left(a - \frac{2031}{14}\right)^2 + \frac{24551071}{7} > 0.$$

Így mindig létezik kettő különböző valós gyök, amelyek szorzata:

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2031 - 7a}{a} = \frac{2031}{a} - 7$$

A kifejezés akkor lesz maximális, ha a pozitív, és ezen belül minimális, tehát $a = 1$ esetén. Így

$$\max\{x_1x_2\} = \frac{2031}{1} - 7 = 2024$$

6. Hány lehetséges értéket vehet fel a következő egyenlőtlenség-rendszert teljesítő $x_1, x_2, \dots, x_{2024}$ változók $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{2024}$ szorzata?

$$x_1x_2 + 1 \leq 2x_2$$

$$x_2x_3 + 1 \leq 2x_3$$

$$\vdots$$

$$x_{2023}x_{2024} + 1 \leq 2x_{2024}$$

$$x_{2024}x_1 + 1 \leq 2x_1$$

Megoldás

Az egyenlőtlenségeket át lehet írni a következő alakba (mivel az egyenlőtlenség-rendszert kielégítő változók egyike sem veheti föl a 0 értéket):

$$x_1 + \frac{1}{x_2} \leq 2$$

$$x_2 + \frac{1}{x_3} \leq 2$$

$$\vdots$$

$$x_{2023} + \frac{1}{x_{2024}} \leq 2$$

$$x_{2024} + \frac{1}{x_1} \leq 2$$

Az egyenlőtlenségeket összeadva:

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \dots + \left(x_{2024} + \frac{1}{x_{2024}}\right) \leq 2024 \cdot 2$$

Mivel az egyenlőtlenség-rendszer miatt minden változó pozitív, így azt is tudjuk, hogy

$$x_i + \frac{1}{x_i} \geq 2$$

így

$$2024 \cdot 2 \leq \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \cdots + \left(x_{2024} + \frac{1}{x_{2024}}\right) \leq 2024 \cdot 2$$

Így egyenlőség csak akkor teljesül, ha bármely i esetén:

$$x_i + \frac{1}{x_i} = 2 \text{ ami pontosan akkor teljesül, ha } x_i = 1.$$

Így a változók szorzata egy lehetséges értéket, az 1-et veheti fel.

Szőkefalvi Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LXI. esztendő

2024-2025. tanév

12. évfolyam

I. forduló

Megoldások

1. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$$

Megoldás

A bal oldalon mindkét négyzetgyökjel alatt egy kifejezés négyzete áll, ezért az egyenlet a következő alakra hozható:

$$|\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1.$$

Ha $\sqrt{x-1} < 2$, azaz $x < 5$, akkor az egyenlet

$$-(\sqrt{x-1}-2) - (\sqrt{x-1}-3) = 1,$$

ahonnan $x = 5$, ami ezen az intervallumon nem megoldás.

Ha $2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$, azaz $5 \leq x \leq 10$, akkor

$$(\sqrt{x-1}-2) - (\sqrt{x-1}-3) = 1,$$

ami azonosság, vagyis minden $x \in [5; 10]$ megoldás.

Ha $\sqrt{x-1} > 3$, azaz $x > 10$, akkor

$$(\sqrt{x-1}-2) + (\sqrt{x-1}-3) = 1,$$

ahonnan $x = 10$, ami ezen az intervallumon nem megoldás.

Az egyenlet megoldásai tehát az $[5; 10]$ -beli valós számok.

2. Egy konvex sokszög szögei egy számtani sorozat egymást követő tagjai. A sorozat első tagja α , differenciája $\frac{\alpha}{2}$. Mekkora α fokokban mért értéke, ha tudjuk, hogy a sokszög a lehető legnagyobb oldalszámú?

Megoldás

Ha a konvex sokszög oldalszáma n ($n \geq 3$), akkor a feltétel alapján a belső szögek összegére felírható az

$$(n-2) \cdot 180^\circ = \frac{n}{2} \cdot \left(2\alpha + (n-1) \cdot \frac{\alpha}{2} \right)$$

egyenlet. Átalakítások után: $\frac{\alpha \cdot n \cdot (n+1)}{2 \cdot (n-2)} = 360^\circ$ (1).

Mivel a sokszög konvex, ezért a legnagyobb szöge is konvex, azaz $\alpha + (n-1) \cdot \frac{\alpha}{2} < 180^\circ$, ahonnan átrendezéssel adódik, hogy $(n+1) \cdot \alpha < 360^\circ$ (2).

(1) és (2) összevetése után α kiküszöbölhető, és n -re a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$n^2 - 5n - 4 < 0.$$

A feltételek figyelembevételével adódik, hogy $3 \leq n < \frac{5 + \sqrt{41}}{2} < 6$, így $n = 5$ a legnagyobb oldalszám. Ekkor $\alpha = 54^\circ$.

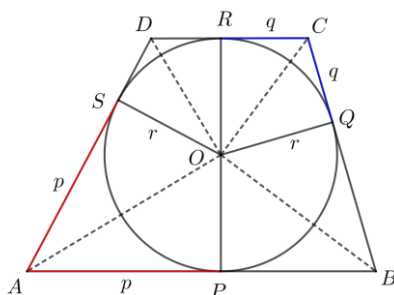
3. Egy háromszög köré írt körének sugara R , beírt körének sugara r . Mutassuk meg, hogy ha a jelöli a háromszög leghosszabb oldalát, m pedig a legrövidebb magasságát, akkor $\frac{R}{r} > \frac{a}{m}$.

Megoldás

Könnyen meggondolható, hogy $a < 2R$ és $2r < m$. Ebből a két egyenlőtlenségből kapjuk, hogy $ar < mR$, amiből átrendezéssel adódik a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

4. Az $ABCD$ trapéz (alapjai AB és CD) érintőnégyyszög. A beírt körhöz az átellenes A és C csúsból húzott érintőszakaszok hossza rendre p és q . Bizonyítsuk be, hogy $p \cdot CD = q \cdot AB$.

Megoldás



Mivel a trapéz szárait illeszkedő szögek összege 180° , és az ábrán szaggatott vonallal jelölt szakaszok felezik a trapéz megfelelő szögét, ezért az AOD és COB háromszögek derékszögűek ($\angle AOD = \angle COB = 90^\circ$). Erre a két derékszögű háromszögre felírva a magasságtételt kapjuk, hogy

$$(1) \quad r^2 = p(AD - p)$$

$$(2) \quad r^2 = q(BC - q).$$

A körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlőségéből adódik, hogy $AD - p = CD - q$ és $BC - q = AB - p$. Ezeket behelyettesítve (1)-be illetve (2)-be, majd a két egyenletet egyenlővé téve adódik a

$$p(CD - q) = q(AB - p)$$

egyenlet. Mindkét oldalhoz pq -t adva kapjuk az állítást.

5. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész n számot, amelyre teljesül, hogy létezik n darab egymást követő pozitív egész szám, amelyek összege prím.

Megoldás

$n=1$ és $n=2$ triviálisan megfelel a feltételnek, ugyanis minden prím egy egytagú összeg, illetve minden páratlan prím két egymást követő pozitív egész szám összege.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy $p = a + (a+1) + \dots + (a+k)$, ahol p prím, a és k pozitív egészek, és $k \geq 2$. A jobboldali összegzést elvégezve és az egyenletet 2-vel megszorozva kapjuk, hogy

$$2p = (k+1)(2a+k).$$

Mivel a jobb oldal mindkét tényezője nagyobb 2-nél, ezért ez az eset nem teljesülhet. A feladat feltétele tehát csak $n=1$ és $n=2$ esetén teljesül.

6. Hányféleképpen írható fel a 2024 egy vagy több pozitív egész szám összegeként úgy, hogy ha az összeg tagjait nem csökkenő sorrendbe írjuk, akkor az utolsó és az első tag különbsége legfeljebb 1?

Megoldás

Legyen $1 \leq k \leq 2024$. Belátjuk, hogy minden k -ra pontosan egy megfelelő felírás van.

Osszuk el maradékosan a 2024-et k -val: $2024 = q \cdot k + r$, ahol $0 \leq r \leq k-1$. Ekkor a 2024-et előállító megfelelő összeg tagjai: r darab $q+1$ és $k-r$ darab q . Rögzített k -ra ez az egyetlen előállítás, így összesen 2024 megfelelő felírás van.